TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

PROF. DR. M. WOLF
DR. M. PRÄHOFER

Funktionentheorie
MA2006/MA2008

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA2006_2015S

Sommersemester 2015
Blatt 6
(19.5.2015)

Hausaufgaben

H6.1. Cauchysche Integralformel

Man berechne $F(r) := \oint\limits_{|z-1|=r} \frac{z^2-z}{z^2+2\mathrm{i}}\mathrm{d}z$ mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel für alle $r \in \mathbb{R}^+$, für die das Integral definiert ist. HINWEIS: Für $r > \sqrt{5}$ Partialbruchzerlegung.

H6.2. Anwendung des Satzes von Liouville

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Man zeige $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$, d.h., das Bild von f liegt dicht in $\mathbb{C}$. Man gebe ein Beispiel mit $f(\mathbb{C}) \neq \mathbb{C}$.
HINWEIS: Unter der Annahme $a \notin \overline{f(\mathbb{C})}$ betrachte man $z \mapsto \frac{1}{f(z)-a}$.

Tutoraufgaben

T6.1. Cauchysche Integralformel

(a) Wie lautet die Cauchysche Integralformel?

(b) Was sagt der Potenzreihenentwicklungsssatz über die Taylorreihe und deren Konvergenzradius einer holomorphen Funktion im Punkt z_0 aus?

(c) Berechnen Sie für $\epsilon > 0$, $k \in \mathbb{Z}$ und das Polynom $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ das Integral

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|z|=\epsilon} \frac{p(z)}{z^{k+1}}\mathrm{d}z.$$

(d) Berechnen Sie für $z_0 \in \mathbb{C}$, $\epsilon > 0$ und das Polynom $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ das Integral

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|z-z_0|=\epsilon} \frac{p(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z.$$

(e) Berechnen Sie für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|z|=1} \frac{e^{-z}}{z^{k+1}}\mathrm{d}z.$$

T6.2. Langsam wachsende ganze Funktionen

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = \mathcal{O}(|z|^k)$ für $|z| \to \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist f ein Polynom, höchstens vom Grad k.

Hausaufgabenabgabe: Mittwoch, 27.5.2015, bis 16:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude (wegen Pfingsten)