TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. M. Wolf
Dr. M. Prähofer

Funktionentheorie
MA2006/MA2008

http://www-m5.ma.tum.de/Allgemeines/MA2006_2015S

Sommersemester 2015
Blatt 5
(12.5.2015)

Tutoraufgaben

T5.1. Windungszahl

Sei $\gamma : [0,T] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ein geschlossener Weg. Die Windungszahl um $z_0 \in \mathbb{C}$ von γ ist definiert als

$$n_{z_0}(\gamma) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}.$$

Sie zählt (mit Vorzeichen), wie oft z_0 von γ gegen den Uhrzeigersinn umrundet wird.

(a) Zeigen Sie $n_0(\gamma) \in \mathbb{Z}$.
Hinweis: Man definiere $L(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} \mathrm{d}s$ und bestimme $\frac{\mathrm{e}^{L(t)}}{\gamma(t)}$ durch Ableiten.

(b) Berechnen Sie $n_0(\gamma_n)$ von $\gamma_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\gamma_n(t) = \mathrm{e}^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Bestimmen Sie anhand einer Skizze die Windungszahlen von $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = \cos t + \mathrm{i} \sin 3t$ um die Punkte $0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

T5.2. Sternförmige Mengen sind einfach zusammenhängend

Zeigen Sie:

(a) Jede sternförmige Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend.

(b) $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

Hausaufgaben

H5.1. Homöomorphe Bilder bleiben einfach zusammenhängend

Man zeige:

(a) Sind $U, V \subset \mathbb{C}$ Gebiete, $\phi : U \to V$ ein Homöomorphismus und U einfach zusammenhängend, dann ist auch V einfach zusammenhängend.

(b) $M = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 1 < |z| < 2\} \setminus \mathbb{R}_0^-$ ist einfach zusammenhängend.

H5.2. Cauchysche Integralformel

Man berechne $\oint\limits_{|z|=r} \frac{\sin z}{2z - \pi} \mathrm{d}z$ für die positiv orientierte Kurve entlang des Randes der Kreisscheibe mit dem Ursprung als Mittelpunkt und dem Radius (a) $r = 1$, bzw., (b) $r = 2$.

Hausaufgabenabgabe: Dienstag, 19.5.2015, bis 16:00, Briefkasten, Keller FMI-Gebäude